**3Д1** **ПРИПРЕМА ЗА КОНТРОЛНИ ЗАДАТАК**

***--- вектори ---***

***I ТИП --- вектори и операције са векторима***

***теоријски део потребан за решавање задатака првог типа:***

1. Ако је $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, тада је $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а $\overrightarrow{BA} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$.
2. Ако је $\vec{a} = (x, y, z)$, тада се вектор $\vec{a}$ може приказати и на следећи начин: $\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$, где је $\vec{\imath} = (1, 0, 0), \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.
3. Ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тада је $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$.
4. Ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, тада је $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.
5. Ако је $\vec{a} = (x, y, z)$, тада је $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

***уводни задаци првог типа:***

1. Нека су $A(1, 5, 1), B(6, 8, -2), C(1, 0, 2)$ три тачке у простору. Одредити координате вектора:
а) $\vec{m} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA}$;
б) $\vec{n} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$;
в) $\vec{l} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CB}$.
Решења: а) $\vec{m} = (10, -9, -3)$ или $\vec{m} = 10\vec{\imath} - 9\vec{\jmath} - 3\vec{k}$; б) $\vec{n} = (-5, -18, 6)$; в) $\vec{l} = (5, 18, -6)$.
2. Ако је $\overrightarrow{AB} = (-4, 2, 9)$ и ако је $A(4, -3, 1)$, одредити координате тачке $B$.
Решење: $B(0, -1, 10)$.
3. Ако је $\overrightarrow{AB} = (2, -7, 1)$, $B(1, 1, -3)$, одредити координате тачке $A$.
Решење: $A(-1, 8, -4)$.
4. Ако је $\vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}, \vec{a} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$, израчунати:
а) $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$; б) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.
Решење: а) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{m} = (6, -1, -1), |\vec{m}| = \sqrt{38}$, па је $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{38}$.
б) $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{10}$.
5. Дати су вектори $\vec{a} = (3, -4), \vec{b} = (-7, -1), \vec{p} = (2, 0)$ и $\vec{q} = (0, -2)$. Одредити координате јединичних вектора датих вектора:
Решење: $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \overrightarrow{b_0} = \left(-\frac{7}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{5\sqrt{2}}\right), \overrightarrow{p_0} = (1, 0)$, $\overrightarrow{q_0} = (0, -1)$.

***задаци првог типа:***

1. Дата су темена $A(1, 2, 2)$ и $B(3, 0, 3)$ и вектор $\overrightarrow{BC} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ троугла $ABC$. Одредити координате темена $C$ и дужину странице $AB$.
Решење: $C(7, 3, 8), c = |\overrightarrow{AB}|, c = 3$.
2. У троуглу $ABC$ дате су координате темена $A(2, -5, 3)$ и вектори $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 2)$ и $\overrightarrow{BC} = (3, -2, 5)$. Одредити координате темена $B$ и $C$ и координате вектора $\overrightarrow{CA}$.
Решење: $B(6, -4, 5), C(9, -6, 10)$, $\overrightarrow{CA} = (-7, 1, -7)$.
3. Дата су три узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(-3, -2, 0), B(3, -3,1)$ и $C(5,0,2)$.
Одредити координате четвртог темена и угао између вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.
Решење: $D(-1, 1, 1), cos\measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{1}{2}, \measuredangle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 120^0$.
4. Дата су три узастопна темена паралелограма $ABCD$: $A(1, -2, 3), B(3, 2, 1)$ и $C(6, 4, 4)$.
Одредити координате четвртог темена.
Решење: $D(4, 0, 6)$.
5. Одредити темена $B, C, D$ и пресек $T$ дијагонала паралелограма $ABCD$, ако је $A(2, -1,5)$, $\overrightarrow{AB} = (1,3,1)$ и $\overrightarrow{AD} = (1, -5,3)$.
Решење: $B(3, 2, 6), C(4, -3, 9), D(3, -6, 8), T(3, -2, 7)$.

***II ТИП --- скаларни производ вектора ---***

***теоријски део:***

*1.* Скаларни производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је број $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$.

2. Ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тада је $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2$.

3. $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, тј. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

4. Ако је $\vec{a} = (x, y, z)$, тада је $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

***задаци другог типа***

1. Израчунати скаларни производ вектора $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k}$.
Решење: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 6$.
2. Одредити скаларни производ вектора:
а) $\vec{a} = (4, -3, 1)$ и $\vec{b} = (5, -2, -3)$;
б) $\vec{a} = (3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (4, -7, -3)$;
в) $\vec{a} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{4}\right)$ и $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}\right)$.
Решење: а) 23; б) 23; в) $\frac{1}{3}$.
3. Одредити угао између вектора $\vec{a} = (-2, 2, -1)$ и $\vec{b} = (-6, 3, 6)$.
Решење: $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}), \cos\varphi = \frac{4}{9}$, $\varphi = arccos\frac{4}{9}$.
4. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао од $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Ако је $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, израчунати $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\vec{b})$.
Решење: $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\vec{b}) = -61$.
5. Одредити број $x$ тако да вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - x\vec{n}$ буду међусобно нормални, ако је $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 2$, $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^0$.
Решење: $x = 1$.
6. За коју су вредност параметра $m$ вектори $\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ и $\vec{b} = m\vec{\imath} - 6\vec{\jmath}$ ортогонални?
Решење: $m = 9$.
7. Који угао заклапају јединични вектори $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ако су вектори $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ узајамно ортогонални?
Решење: $\sphericalangle(\vec{m},\vec{n}) = 60^0$.

***III ТИП --- скаларни производ вектора ---***

1. Одредити интензитет вектора $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ако је $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 30^0$.
Решење: $|\vec{c}| = 2$.
2. Одредити интензитет вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ако је $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 3, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
Решење: $|\vec{c}| = 7$.
3. Израчунати интензитет вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, ако су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ ортогонални јединични вектори.
$(\vec{m}\perp\vec{n}, |\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 1)$.
Решење: $|\vec{a}| = 5$.
4. Нека су $\vec{m}$ и $\vec{n}$ јединични вектори који заклапају угао од $120^0$. Одредити угао који образују вектори $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$.
Решење: , $cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{1}{2}, \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 120^0$.

***IV ТИП --- векторски производ вектора ---***

***теоријски део:***

1. Векторски производ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ одређен својствима:

а) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$;

б) $\vec{a} \times \vec{b}$ је нормалан и на вектор $\vec{a}$ и на вектор $\vec{b}$;

в) тројка $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ је позитивно оријентисана.

2. Својства векторског производа:

а) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

б) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

в) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;

г) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ако и само ако је $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

д) Ако је $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, онда је $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

3. Површина паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дата је са $P = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

***задаци четвртог типа***

1. Вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образују угао од $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ако је $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$, израчунати $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Решење: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{2}$.

2. Ако је $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, наћи $\vec{u} \times \vec{v}$.

Решење: $\vec{u} \times \vec{v} = 15\vec{\omega}$, при чему је $\vec{\omega}$ јединични вектор нормалан на раван коју одређују вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

3. Израчунати векторски производ вектора $\vec{a} = (2, 1, 3)$ и $\vec{b} = (2, 7, -1)$.

Решење: $\vec{a} \times \vec{b} = (-22, 8, 12)$.

4. Израчунати векторски производ вектора $\vec{u} = (3, -2, 5)$ и $\vec{v} = (2, -1, 3)$.

Решење: $\vec{u} \times \vec{v} = (0, -10, 10)$.

5. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = (2, 1, 2)$ и $\vec{b} = (3, 2, 2)$.

Решење: $P = |\vec{a} \times \vec{b}|, P = 3$.

6. Израчунати површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{a} = (1, 1, -1)$ и $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

Решење: $P = 26$.

7. Израчунати површину троугла $ABC$ чија су темена $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(4, 3, 5)$.

Решење: $P_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

8. Израчунати површину троугла $ABC$ чија су темена $A(2, -3, 4), B(1, 2, -1), C(3, -2, 1)$.

Решење: $P_{\Delta ABC} = 5\sqrt{2}$.

9. Наћи површину паралелограма конструисаног над векторима $\vec{p} = 2\vec{b} - \vec{a}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, ако је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

Решење: $P = |\vec{p} \times \vec{q}| = 8|\vec{b} \times \vec{a}| = 100\sqrt{2}$.

***V ТИП --- векторски производ вектора ---***

1. Одредити координате вектора $\vec{r}$ који је нормалан на векторима $\vec{a} = (4, -2, -3)$ и $\vec{b} = (0, 1, 3)$ и гради са осом $Oy$ туп угао ако је $|\vec{r}| = 26$.
Решење: $\vec{r} = (-6, -24, 8)$.
2. Вектор $\vec{r}$ нормалан је на $Oz$ осу и на вектор $\vec{a} = (8, -15, 3)$. Ако је $|\vec{r}| = 51$ и $\vec{r}$ гради оштар угао са $Ox$ осом, одредити координате вектора $\vec{r}$.
Решење: $\vec{r} = (45, 24, 0)$.
3. Одредити координате вектора $\vec{c}$ који је нормалан на векторе $\vec{a} = (2, 3, -1)$ и $\vec{b} = (1, -2, 3)$ и гради са осом $Oz$ туп угао ако је $|c| = 3\sqrt{3}$.
Решење: $\vec{c} = (3, -3, -3)$.
4. Одредити координате вектора $\vec{p}$ који је нормалан на векторима $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ и $\vec{b} = (-2, 3, 1)$ и гради са осом $Oy$ оштар угао ако је $|\vec{p}| = 6\sqrt{6}$.
Решење: $\vec{p} = (12, 6, 6)$.