ГИМНАЗИЈА „СТЕВАН ПУЗИЋ“ РУМА

МАТЕМАТИКА 4

ЗАДАЦИ ИЗ МАТЕМАТИКЕ ЗА ПРИПРЕМУ РАЗРЕДНОГ ИСПИТА

4. РАЗРЕД – ОПШТИ СМЕР

* ОБЛАСТ ДЕФИНИСАНОСТИ ФУНКЦИЈЕ

1. Одредити област дефинисаности следећих функција:

а) $y = \sqrt{\log_{0,5}(3x^2 - 2x)}$

$Dom\, y = \left[-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]$

б) $y = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_4 x$

$Dom\, y = (1, 4)$

в) $y = \sqrt{\log_{0,5}(3x-8) - \log_{0,5}(x^2+4)}$

$Dom\, y = \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$

г) $y = \sqrt{\ln \frac{x^2-7x+11}{x^2+x-12}}$

$Dom\, y = (-\infty, -4) \cup \left[\frac{23}{8}, 3\right)$

д) $f(x) = \ln\left(\frac{3x^2+2x}{6-x}\right) + \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{5-x}}$

$Dom\, f(x) = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, 1] \cup [2, 5)$

ђ) $f(x) = \ln\left(\frac{6-x}{-3x^2+9x}\right) + \sqrt{\frac{x^2-3x+9}{2x+11}}$

$Dom\, f(x) = (0, 3) \cup (6, +\infty)$

е) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+10}{2x-1}} + \ln\left(\frac{8-x}{-2x^2+6x}\right)$

$Dom\, f(x) = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \cup (8, +\infty)$

ж) $y = \sqrt{arc\cos(\log_2 x)}$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

з) $y = \sqrt{4 - x^2} + arc\sin\frac{x+1}{2x+1}$

$x \in \left[-2, -\frac{2}{3}\right] \cup [0, 2]$

и) $y = \sqrt{\log(\sin x)}$

$Dom\ y = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

**** ПАРНОСТ И НЕПАРНОСТ ФУНКЦИЈА***

2. Испитати парност и непарност функције f, где је:

а) $f(x) = 2x^5 + x^3 - 4x$
непарна

б) $f(x) = 2x - \sin x$
непарна

в) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$
непарна

г) $f(x) = x\ \log_a \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$
парна

д) $f(x) = 2^{-x}(1 + 2^x)^2$
парна

ђ) $f(x) = \log_a\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
непарна

е) $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, a > 1$
непарна

3. Функцију $f(x) = e^x \sin x$ написати као збир једне парне и једне непарне функције.

$p(x) = \frac{\sin x}{2}(e^x - e^{-x}),\ \ n(x) = \frac{\sin x}{2}(e^x + e^{-x})$

**** ПЕРИОДИЧНОСТ ФУНКЦИЈА***

4. Одредити период функције:

а) $f(x) = sin^3 3x$
$\omega = \frac{2\pi}{3}$

б) $f(x) = sin^3 2x$
$\omega = \pi$

в) $f(x) = \sin 4x + 2\ cos^2 3x$
$\omega = \pi$

г) $f(x) = 8\ sin^2 2x \cdot \cos 6x$
$\omega = \pi$

д) $f(x) = 8\ sin^2 3x \cdot \cos 5x$
$\omega = 2\pi$

** СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА*

5. Одредити $f(x)$, ако је $f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = x - 2, x \neq -2$.
   $f(x) = \frac{4x-3}{2-x}$
6. Одредити $f(x)$, ако је$f\left(\frac{3-x}{2x+5}\right) = 1 - \frac{2}{x}$.
   $f(x) = \frac{1-9x}{3-5x}$
7. Одредити $F\left(\frac{x}{x+1}\right)$, ако је $F\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \frac{x-3}{4x+1}$
   $F\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{5}{13x+7}$
8. Одредити $F\left(\frac{x}{x-1}\right)$, ако је $F\left(\frac{x-2}{2x+1}\right) = \frac{x-3}{4x+1}$
   $F\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{6x+1}{11x-9}$
9. Ако је $f\left(\frac{x}{x-3}\right) + 3f\left(\frac{x-3}{x}\right) = x + 2$, одредити $f(2)$.
   $f(x) = \frac{13-x}{8-8x}$, $f(2) = -\frac{11}{8}$
10. Ако је $f\left(\frac{x-2}{x}\right) + 3f\left(\frac{x}{x-2}\right) = x + 1$, одредити $f(2019)$.
    $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f(2019) = \frac{2019}{2018}$

** ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА*

11. Одредити инверзну функцију функције $y = 3x - 1$.
    $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$
12. Одредити инверзну функцију функције $y = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$.
    $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-1}$
13. Одредити инверзну функцију функције $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
    $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
14. Одредити инверзну функцију функције $f(x) = \frac{\ln x - 2}{3\ln x + 2}$.
    $f^{-1}(x) = e^{\frac{2x+2}{1-3x}}$
15. Наћи инверзну функцију функције $f(x) = \ln\frac{3x+1}{x-2}$.
    $f^{-1}(x) = \frac{-2e^x - 1}{3 - e^x}$
16. Одредити кодомен функције $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 3}$.
    $\overline{Dom}\, f(x) = \left(-\frac{1}{3}, 2\right)$
17. Одредити кодомен функције $f(x) = \frac{3e^x - 2}{e^x + 1}$.
    $f^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{3-x}$, $\overline{Dom}\, f(x) = (-2, 3)$

18. Одредити кодомен функције $f(x)=\frac{-1-3e^{7x}}{e^{7x}-5}$.

$f^{-1}(x)=\frac{1}{7}\ln\frac{5x-1}{x+3}$, $\overline{Dom}\, f(x)=(-\infty,-3)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$

**** ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ***

19. Одредити:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$\frac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+6x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}$

-12

в) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-4x}{x^4-2x^3+3x-6}$

$\frac{8}{11}$

г) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$

$-\frac{3}{4}$

д) $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{8x}-\sqrt{x+8}}{x-8}$

$\frac{1}{24}$

ђ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$

$-\frac{1}{3}$

е) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

-1

20. Израчунати следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 4x}{\sin 2x}$

$\frac{1}{2}$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$, $b\neq 0$

$\frac{a}{b}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 5x}{2x+\sin 3x}$

$-\frac{4}{5}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{\sin 3x}$

$\frac{5}{3}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{tg\,x}$

2

ђ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ 2x}{3x}$

$\frac{2}{3}$

е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ x - x}{x + \sin x}$

0

ж) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(mx)}{x^2}$

$\frac{m^2}{2}$

з) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2}$

-4

и) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(kx) - cos(mx)}{x^2}$

$\frac{1}{2}(m^2 - k^2)$

ј) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\ x - \sin x}{x^3}$

$\frac{1}{2}$

к) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$\frac{1}{4}$

л) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arc \sin 2x}{arc \sin x}$

2

љ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{arc\ tg\ x}{x}$

1

21. Одреди следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1 - tg\ x)}$

-2

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$

1

в) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}$

$\frac{1}{a}$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos x)}$

4

22. Одредити следеће граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x+2}$

$\frac{1}{e^2}$

б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{3x^2}$

e^6

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg\,x}$

1

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos 2x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\sqrt{e^5}$

д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-6x}$

e^{-6}

ђ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

$\sqrt{e}$

23. Одреди:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}$

$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 3x-\sin x}$

$\frac{1}{2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

$\frac{2}{3}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}$

1

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}{x}$

$-\frac{1}{6}$

**** АСИМПТОТЕ ГРАФИКА ФУНКЦИЈЕ:***

24. Одредити асимптоте графика следећих функција:

а) $y=\frac{2x-1}{x^2+x-2}$

$v.a.\, x=-2, x=1;\quad h.a.\quad y=0$

б) $y=\frac{x^2-x+1}{x^3+3x^2+2x}$

$v.a.\, x=0, x=-2, x=-1;\quad h.a.\quad y=0$

в) $y=\frac{4x^3-1}{x^2-3x+2}$

$v.a.\, x=1, x=2;\quad k.a.\quad y=4x+12$

г) $y=\frac{x^2-2x-2}{x+1}$

$v.a.\, x=-1;\quad k.a.\quad y=x-3$

25. Одредити косу асимптоту графика следеће функције:

$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$

$k.a. \quad y = x - \frac{2}{3}$

** ИЗВОДИ ФУНКЦИЈА*

26. Одредити изводе следећих функција:

а) $f(x) = \frac{1+x\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{(1-x\sqrt{x})^2}$

б) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$f'(x) = -\frac{2}{1-\sin 2x}$

в) $y = e^{\sin x}$

$y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

г) $y = \ln(3x^2 - 1)$

$y' = \frac{6x}{3x^2-1}$

д) $y = x^x$

$y' = x^x(\ln x + 1)$

27. Одредити изводе следећих функција:

а) $y = (x^2 + x - 1)^{20}$

$y' = 20(2x+1)(x^2 + x - 1)^{19}$

б) $y = (2x+1)^{25}$

$y' = 50(2x+1)^{24}$

в) $y = (1-x)^{13}$

$y' = -13(1-x)^{12}$

г) $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

$y' = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$

д) $y = \ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + arctg\ x$

$y' = \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}$

ђ) $y = \ln\left(\frac{2x+1}{1+x}\right)$

$y' = \frac{1}{(2x+1)(x+1)}$

е) $y = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

$y' = \frac{-1}{x^2-1}$

28. Одредити изводе следећих функција:

а) $y = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$y' = -\frac{1}{\cos x}$

б) $y = arctg\ \left(\frac{1+3x}{1-3x}\right)$

$y' = \frac{3}{1+9x^2}$

в) $y = arc\sin\frac{2x^2}{1+x^4}$

$y' = \frac{4x\ sgn(1-x^4)}{1+x^4}$

г) $y = x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$y' = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x\ sgn(x)}{1+x^2}$

29. Одредити изводе следећих функција:

а) $y = 9\ln\left(\sqrt{x+9} + \sqrt{x}\right) - \sqrt{x^2+9x}$

$y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+9x}}$

б) $y = \sqrt{x+1} - \ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

$y' = \frac{1}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

в) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+7} + \frac{7}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)$

$y' = \sqrt{x^2+7}$

г) $y = \ln\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$

$y' = \frac{2}{(2+x)(2-x)}$

д) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$

$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$

ђ) $y = arc\ tg\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

е) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}arc\ tg\ x$

ж) $y = 4\ln\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x}\right) + \sqrt{x^2-4x}$

$y' = \frac{2\sqrt{x-4}+(x-2)\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}}$

з) $y = 4\ln\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}\right) + \sqrt{x^2-4x}$

$y' = \sqrt{\frac{x}{x-4}}$

и) $y = \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{2}arctg\ x$

$y' = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$

ј) $y = \frac{x}{1+x^2} - arc\ tg\ x$

$y' = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$

к) $y = arc\ tg\ x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$y' = \frac{2}{1-x^4}$

*** ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ФУНКЦИЈЕ**

30. Применом диференцијала приближно израчунати:

а) $\sqrt{4,03}$
$\sqrt{4,03} \approx 2,0075$

б) $\sqrt[3]{25}$
$\sqrt[3]{25} \approx 2,925925 \ldots$

в) $\sqrt[4]{250}$
$\sqrt[4]{250} \approx 3,9765625$

г) $\sqrt[3]{120}$
$\sqrt[3]{120} \approx 4,93333 \ldots$

д) $\ln(1,02)$
$\ln(1,02) \approx 0,02$

ђ) $\sin(29^0) \approx 0,4848850 \ldots$

е) $arc\ tg\ (0,98)$

ж) $(5,123)^2$

з) $(3,98)^3$

и) $\sqrt{145}$

ј) $\sqrt{11}$

к) $\sqrt[3]{56}$

л) $\sqrt[4]{13}$

*** ТАНГЕНТА И НОРМАЛА КРИВЕ**

31. Написати једначине тангенте и нормале на параболу $y = 2 + x - x^2$ у тачки $M(1,2)$.
t: $y = -x + 3$; n: $y = x + 1$

32. Написати једначине тангенте и нормале на криву $y = \frac{3-2x}{2x+1}$ у њеној тачки $x_0 = -1$.
t: $8x + y + 13 = 0$; n: $x - 8y - 39 = 0$

33. Написати једначине тангенте и нормале на криву:

а) $y = 2x^2 - 4x + 5$, у тачки $M(3, 11)$
t: $y - 8x + 13 = 0$, n: $8y + x - 91 = 0$

б) $y = \frac{6x}{x^2-1}$, у тачки $M(2, 4)$
t: $y + 6x - 16 = 0, n$: $6y - x - 22 = 0$

в) $y = \frac{5x^2}{1+x^2}$, у тачки $M(2, 4)$
t: $4x - 5y + 12 = 0, n$: $5x + 4y - 26 = 0$

г) $y = sin^2 x$, у тачки $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$

34. Одредити једначину тангенте графика функције $y = f(x)$ у тачки $M_0(1, y)$ која припада том графику, ако је:

а) $y = (x^2 + x - 1)^{10}$
$y = 30x - 29$

б) $y = \sqrt{2 - x^2}$
$y = -x + 2$

в) $y = e^{\sin(\pi x)}$
$y = -\pi x + \pi + 1$

г) $y = arc\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

д) $y = arc\ tg\ (2x^2 - 1)$
$y = 2x + \frac{\pi}{4} - 2$

**** ЛОПИТАЛОВА ТЕОРЕМА***

35. Применом Лопиталове теореме израчунати граничне вредности:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x^2}{(1+x)^3-1+x^2}$
$-\frac{1}{3}$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$
$\frac{1}{2}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\,x-x}{x-\sin x}$
2

г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (tg\ x)^{tg\ (2x)}$
e^{-1}

д) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

ђ) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$
$e^{\frac{2}{\pi}}$

**** ПРИМЕНА ИЗВОДА У ГЕОМЕТРИЈИ:***

36. У круг колупречника r упиши правоугаоник највеће површине.
$P = 2r^2$

37. Збир основице и висине троугла износи $10cm$. Колика треба да буде основица да би површина троугла била највећа.
$a = 5$

38. У сферу полупречника R упиши ваљак највеће запремине.

$V_{max} = \frac{4R^3\pi\sqrt{3}}{9}$

39. Од свих цилиндара дате запремине V одреди онај чија је површина најмања.

$P = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)$

40. Наћи величину полупречника основе и висину ваљка запремине $27\pi cm^3$, тако да му површина буде најмања.

$r = 3 \cdot \sqrt[3]{2}, H = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$

41. Око дате сфере полупречника R описати купу најмање запремине.

$V = \frac{8}{3}R^3\pi$

42. Израчунати дужину полупречника основе праве кружне купе најмање запремине описане око ваљка са полупречником основе r. Равни основе ваљка и купе се поклапају.

$R = \frac{3}{2}r$

43. Наћи висину праве купе константне површине $a^2\pi$, која има највећу запремину.

$H = a\sqrt{2}$

44. Број 8 разложи на два позитивна сабирка тако да збир њихових кубова буде најмањи.

$a = 4, b = 4$