КОНГРУЕНЦИЈА ПО МОДУЛУ

Дефиниција: *Нека су* a, b и m *цели бројеви такви да* a и b *при дељењу са* m *дају једнаке остатке. Тада за бројеве* a и b *кажемо да су конгруентни по модулу* m *и пишемо:* $a \equiv b(mod\ m)$.
Другим речима, m *дели* $a - b$.

Својства конгруенције по модулу у скупу целих бројева:

1. $\boldsymbol{a \equiv a(mod\ m)}$
2. $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ и $\boldsymbol{c \equiv d(mod\ m)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a + c \equiv b + d(mod\ m)}$
3. $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ и $\boldsymbol{c \equiv d(mod\ m)} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)}$
4. $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ и $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a^n \equiv b^n(mod\ m)}$
5. $\boldsymbol{a \equiv b(mod\ m)}$ и $\boldsymbol{k \in \mathbb{N}} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{k \cdot a \equiv k \cdot b(mod\ m)}$

Задаци:

1. Колики је остатак дељења броја 2^{100} са 5?
   $2^{100} = 5 \cdot q + r,\ \ r = 1$
2. Колики је остатак дељења броја 2^{100} са 13?
   $2^{100} = 13 \cdot q + r,\ \ r = 3$
3. Колики је остатак дељења броја 101^{100} са 7?
   $101^{100} = 7 \cdot q + r,\ \ r = 4$
4. Колики је остатак дељења броја 2^{2019} са 11?
   $2^{2019} = 11 \cdot q + r,\ \ r = 6$
5. Одредити остатак дељења 3^{300} са 13.
   $3^{300} = 13 \cdot q + r,\ \ r = 1$
6. Колики је остатак дељења броја 222^{555} са 11?
   $222^{555} = 11 \cdot q + r,\ \ r = 10$
7. Колики је остатак дељења броја 333^{777} са 11?
   $333^{777} = 11 \cdot q + r,\ \ r = 9$

8. Одредити последњу цифру броја 3^{2019}.
   $3^{2019} = 10 \cdot q + r,\ \ r = 7$
9. Одредити последњу цифру броја 777^{333}.
   $777^{333} = 10 \cdot q + r,\ \ r = 7$
10. Одредити последњу цифру броја 77^{77}.
    $77^{77} = 10 \cdot q + r,\ \ r = 7$
11. Одредити последњу цифру броја 7^{777}.
    $7^{777} = 10 \cdot q + r,\ \ r = 7$
12. Одредити двоцифрени завршетак броја $99^{1234567}$.
    $99^{1234567} = 100 \cdot q + r,\ \ r = 99$
13. Одредити двоцифрени завршетак броја 9^{200}.
    $9^{200} = 100 \cdot q + r,\ \ r = 1$

14. Доказати да је број $4^{99} + 9^{44}$ дељив са 5.
    $4^{99} + 9^{44} \equiv 0(mod\ 10)$
15. Доказати да је број $3^{105} + 4^{105}$ дељив са 13.
    $3^{105} + 4^{105} \equiv 0(mod\ 13)$
16. Доказати да је број $2^{70} + 3^{70}$ дељив са 13.
    $2^{70} + 3^{70} \equiv 0(mod\ 13)$
17. Доказати да је број $19^{91} - 91^{19}$ дељив са 72.
    $19^{91} - 91^{19} \equiv 0(mod\ 72)$